

المورفزم البولياني
 لنكن المجموعتين البولياني A و B نعرّف التطبيق f من A إلى B بالمورفزم البولياني
 إذا صدق فيه الخواص (كن من خواص) إذا f صدق فيه الخواص الخمسة أي $A \subseteq B$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in A$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in A$$

سبب هذا يمكننا استنتاج أن المورفزم البولياني يحفظ الخواص الخمسة
 أي $A \subseteq B$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x') = (f(x))'$$

$$f(0) = 0$$

مبرهنة:
 إذا كانت A و B مجموعتين بولياني و f تطبيق من A إلى B يحفظ الخواص الخمسة متكافئة
 (a) f مورفزم بولياني

(b) من أجل أي عنصرين $x, y \in A$ نحصل $f(xy) = f(x)f(y)$; $f(x') = (f(x))'$
 (c) من أجل أي عنصرين $x, y \in A$ نحصل $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$; $f(x') = (f(x))'$

البرهان:

$$\forall x \in A : f(x') = f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + 1 = (f(x))' \quad b \Leftarrow a$$

$x+1 = x'$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A : f(x \vee y) &= f(x' y')' = (f(x' y'))' = (f(x') f(y'))' \\ &= (f(x'))' \vee (f(y'))' \\ &= ((f(x))')' \vee ((f(y))')' \\ &= f(x) \vee f(y) \end{aligned} \quad c \Leftarrow b$$

$$\forall x, y \in A : f(x \cdot y) = f(x' \vee y')' = (f(x' \vee y'))' \quad c \Leftarrow a$$

$$= (f(x) \vee f(y))' = (f(x))' (f(y))'$$

$$= [(f(x))' (f(y))'] = f(x) f(y)$$

$$\forall x, y \in A \quad f(xy) = f[(x \wedge y) \vee (x \wedge y)'] = f(x \wedge y) \vee f(x \wedge y)' \\ = f(xy) \vee f(xy)' = (f(x) f(y)) \vee (f(x) f(y))'$$

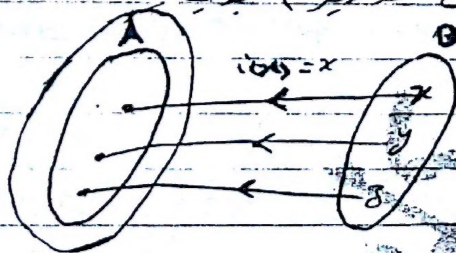
$$= (f(x) \wedge (f(y))') \vee ((f(x))' \wedge f(y)) \\ = f(x) + f(y)$$

معيارية الفجوة

$$f(1) = f(x \vee x') = f(x) \vee f(x)' = f(x) \vee (f(x))' = 1$$

أصلية:

إذا كانت B حلقة بوليانية جزئية من الحلقة البوليانية A فإن إسقاط الثاني من A إلى B هو $f(x) = x$ حيث $x \in B$ و $f(x) = 0$ حيث $x \notin B$.



إذا كانت $A = \{0, 1\}$ و $x_0 \in A$ غير صفرياً، فإن $f(x) = 1$ إذا $x = x_0$ و $f(x) = 0$ إذا $x \neq x_0$. هذا الإسقاط يسمى إسقاط x_0 .

$$f(x) = 1 \quad \text{if} \quad x = x_0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{if} \quad x \neq x_0$$

يكون إسقاط بولياني وذلك لأن

$$\forall x, y \in A \quad f(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in x \cap y \\ 0 & \text{if } x_0 \notin x \cap y \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in x \text{ and } x_0 \in y \\ 0 & \text{if } x_0 \notin x \text{ or } x_0 \notin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X \cap Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in X \neq x_0 \in Y \\ 0 & \text{if } \begin{cases} x_0 \notin X \neq x_0 \in X \\ x_0 \in X \neq x_0 \notin Y \\ x_0 \notin X \neq x_0 \notin Y \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X \cap Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) = 1 \neq f(y) = 1 \\ 0 & \text{if } \begin{cases} f(x) = 0 \neq f(y) = 1 \\ f(x) = 1 \neq f(y) = 0 \\ f(x) = 0 \neq f(y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X \cap Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) \neq f(y) = 1 \\ 0 & \text{if } f(x) \neq f(y) = 0 \end{cases}$$

أي أنه لا يجمع الأحوال بحسن

$$\Rightarrow f(X \cap Y) = f(x) \neq f(y)$$

((نلاحظ أن كل سطح في المنطق $A = \{0, 1\}$ المستر $V = \{0, 1\}$))

$$\forall x \in A \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \in x \\ 0 & \text{if } x_0 \notin x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_0 \notin x \\ 0 & \text{if } x_0 \in x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) = 0 \\ 0 & \text{if } f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (f(x))' = 1 \\ 0 & \text{if } (f(x))' = 0 \end{cases}$$

تعاريف:

- إذا كانت f دالة بولياي من A إلى B نكتب $f: A \rightarrow B$
- المرفوعين بولياي هو دالة بولياي من A إلى B
- البين دالة بولياي هو دالة بولياي من A إلى B
- البين دالة بولياي $f: A \rightarrow B$ إذا كانت $A = B$ مع نفس البين
- البين دالة بولياي $f: A \rightarrow B$ إذا كانت البين دالة بولياي + تقابلي

تركيب المورفزمات :

لكن A, B, C ثلاث بوليات المورفزمات $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$

حقيقة :

التركيب $g \circ f$ يكون مورفزم بوليات $A \rightarrow C$ وإذا كانت f, g مورفزمات (أو مورفزم أو المورفزمات) $g \circ f$ يكون أيضا

البرهان :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A \quad g \circ f: A &\rightarrow C \\ (g \circ f)(xy) &= g(f(xy)) \\ &= g(f(x)f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) (g \circ f)(y) \\ &= (g \circ f)(xy) \end{aligned}$$

وليس المحقق من البرهان الثاني وبما في الشرط

حقيقة :

إذا كانت f مورفزم بوليات $A \rightarrow B$ فإن التركيب العكسي f^{-1} يكون المورفزم بوليات $B \rightarrow A$

البرهان :

لكن $x, y \in B$ ($= x, y \in A$) $f^{-1}(x) = y$ $f^{-1}(f(x)) = x$ $f^{-1}(f(y)) = y$

$$\Rightarrow x, y = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(xy) \Rightarrow xy = f^{-1}(x, y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(xy)$$

البرهان الثاني

$$\forall x \in B \Rightarrow \exists x \in A : f(x) = x \Rightarrow x = f^{-1}(x)$$

